数理解析研究所講究録
315巻 1977年 99-135

$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda e^u=0$ について

大阪市立大・理　亀高　惟倫
牧野　哲

§1 問題の設定と主な結果

問題Ⅰ. 2階非線型常微分方程式

(1.1) $$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda e^u=0$$

の解 $u(r)$, $0<r<1$, で次の条件を満たすものを求める:

(1.2) $$\frac{du}{dr}=\begin{cases} O(r) & (0<n<2) \\ O(1) & (2\leq n) \end{cases}, \quad r\searrow 0;$$

(1.3) $$u(1)=0.$$

問題Ⅱ. 方程式 (1.1) の解 $u(r)$, $0<r<1$, で条件 (1.2) 及び

(1.4) $$\int_0^1 e^{u(r)}r^{n-1}dr=\frac{1}{n}$$

を満たすものを求める.

ただし $n>0$, λ は実数のパラメータとする. 我々の目的は, 問題Ⅰ, 問題Ⅱの解の個数および性質を調べることである. 主な結果を述べると

1) 解の個数　問題Ｉ［問題Ⅱ］の解の個数 $k_{\mathrm{I}}(\lambda, n)$ ［$k_{\mathrm{II}}(\lambda, n)$］は次の表のように変化する．

表 1.　i) $0<n<2$

	$\lambda\leqq 0$	$0<\lambda<\lambda_1$	$\lambda=\lambda_1$	$\lambda_1<\lambda$
k_{I}	1	2	1	0

	$-\infty<\lambda<+\infty$
k_{II}	1

ここに λ_1 は n に依存する正の定数.

ii) $n=2$

	$\lambda\leqq 0$	$0<\lambda<2$	$\lambda=2$	$2<\lambda$
k_{I}	1	2	1	0

	$\lambda<8$	$8\leqq\lambda$
k_{II}	1	0

iii) $2<n<10$

	$\lambda<\lambda_2$	$\lambda=\lambda_2$	$\lambda_2<\lambda<\lambda_4$		$\lambda=\lambda_{2k}$	$\lambda_{2k}<\lambda<\lambda_{2k+2}$	$\lambda=\lambda_{2k+2}$	
k	1	2	3		$2k$	$2k+1$	$2k+2$	

	$\lambda=\lambda_\infty$		$\lambda=\lambda_{2k-1}$	$\lambda_{2k-1}<\lambda<\lambda_{2k+1}$	$\lambda=\lambda_{2k+1}$		$\lambda=\lambda_2$	$\lambda_2<\lambda$
	∞		$2k-1$	$2k$	$2k+1$		1	0

ここに $k=k_{\mathrm{I}}$ ［k_{II}］にたいして $\lambda_j=\lambda_{\mathrm{I},j}$ ［$\lambda_{\mathrm{II},j}$］は正の定数列であって，$\lambda_{2k}\nearrow\lambda_\infty$ $(k\nearrow\infty)$，$\lambda_{2k-1}\searrow\lambda_\infty$ $(k\nearrow\infty)$，ただし $\lambda_{\mathrm{I},\infty}=2(n-2)$ ［$\lambda_{\mathrm{II},\infty}=2n$］.

iv) $10\leqq n$

	$\lambda<2(n-2)$	$2(n-2)\leqq\lambda$
k_{I}	1	0

	$\lambda<2n$	$2n\leqq\lambda$
k_{II}	1	0

方程式 (1.1) は非線型楕円型方程式

(1.5) $$\Delta u + \lambda e^{u} = 0$$

の回転対称解の方程式である. $n=2$ のときは, 1850年 J. Liouville が2つの任意函数を含む一般解を発見したことに因んで Liouville の方程式と呼ばれることがある. I. M. Gel'fand は [2] で, $n=1,2,3$, $\lambda>0$ のときの問題 I の解の個数を調べ, $n=3$, $\lambda=2$ で $k_I=\infty$ となることを示した. この結果をその後 D. D. Joseph & T. S. Lundgren が $n>2$, $\lambda>0$ のばあいに拡張し, i) $k_I=0$ for $\lambda>{}^{\exists}\lambda^*$; $\lambda^*=2(n-2)$ for $n\geqq 10$; ii) $k_I=1$ for $0<\lambda<2(n-2)$, $n\geqq 10$; iii) $k_I=1$ for $\lambda=\lambda^*$, $n<10$; iv) $k_I=\infty$ for $\lambda=2(n-2)$, $n<10$; v) $1\ll k_I<\infty$ for $0\neq|\lambda-2(n-2)|\ll 1$, $n<10$, を得ている ([5], Theorem 2). 表1はこの結果を $n>0$, $-\infty<\lambda<+\infty$ に拡張して精しくしたものである.

我々は次の方針で行う.

まず, 問題を2階有理的常微分方程式

(1.6) $$\frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{b}\left(\frac{db}{dz}\right)^2 - \frac{n}{2z}\left(\frac{db}{dz} + b^2\right)$$

の $b(0)=1$ を満たす解 $b(z;n)$ の性質を調べることに帰着させる. $b(z;n)$ 及び $a(z;n)=-d\log b(z;n)/dz$ は実軸のある区間 $(-\rho(n), +\infty)$ の上で解析的となり逆函数を持つことがわかる. さらに, 関係式

$$(1.7)_{\mathrm{I}} \qquad e^{A}\, b(\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)e^{A/2n}\,;\, n) = 1$$

$$\left[(1.7)_{\mathrm{II}} \qquad e^{A}\, a(\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)e^{A/2n}\,;\, n) = 1 \right]$$

によって，$-\infty < A < +\infty$ の函数 $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$，[$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$] が定義される．このとき，

2) <u>解の公式</u>．問題I [問題II] は，A に関する方程式

$$(1.8)_{\mathrm{I}\,[\mathrm{II}]} \qquad \lambda = \lambda_{\mathrm{I}}(A;n) \quad [\ \lambda = \lambda_{\mathrm{II}}(A;n)\ ]$$

が解 $A = A_j$，$j = 1, \cdots, k_{\mathrm{I}}$ [k_{II}] を持つとき，ちょうど解

$$(1.9)_{\mathrm{I},\,[\mathrm{II}]} \qquad u(r) = A_j + \log b(\lambda e^{A_j} r^2/2n\,;\, n), \quad j = 1, \cdots, k_{\mathrm{I}}\ [k_{\mathrm{II}}]$$

を持つ．

したがって（A, λ）－平面に描かれた函数 $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ [$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$] のグラフが問題I [問題II] の分岐ダイアグラムを与える．ところが，$\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ [$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$] じしんがある2次元自律系を満たすため，その大域的挙動が厳密に調べられる．たとえば，

3) $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ [$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$] の増減は次の表のようになる．

表 2．i) $0 < n < 2$

A	$-\infty$		0		A_1		$+\infty$
λ_{I}	$-\infty$		$\nearrow$		λ_1	$\searrow$	0

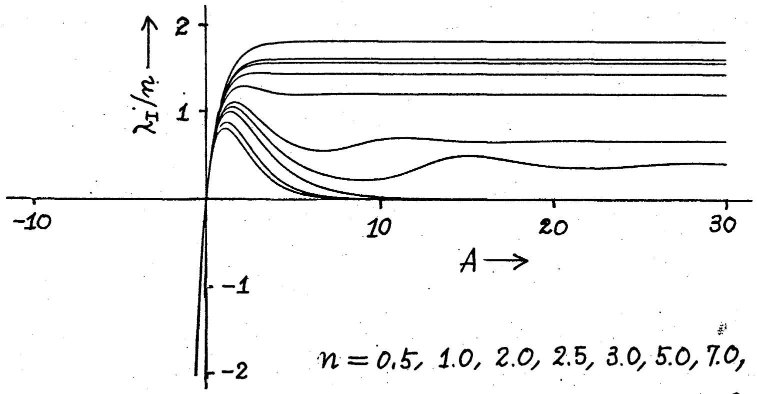
A	$-\infty$		0		$+\infty$
λ_{II}	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

ii) $n = 2$ 　　$\lambda_{\mathrm{I}}(A;2) = 8(e^{-A/2} - e^{-A})$，

$\lambda_{\mathrm{II}}(A;2) = 8(1 - e^{-A})$．

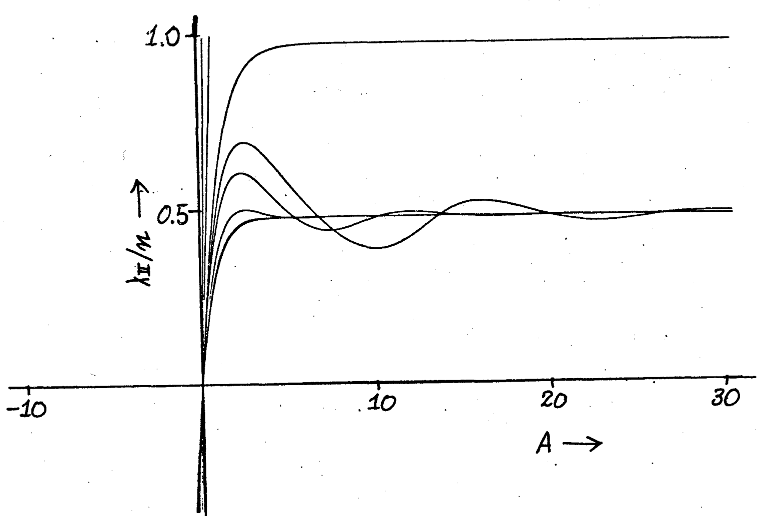
iii) $2 < n < 10$

図 1. 問題Ⅰの分岐ダイアグラム



$n = 0.5,\ 1.0,\ 2.0,\ 2.5,\ 3.0,\ 5.0,\ 7.0,$
$9.0, 10.0, 20.0$

図 2. 問題Ⅱの分岐ダイアグラム



$n = 0.5,\ 1.0,\ 2.0,\ 2.5,\ 3.0,\ 5.0,$
$9.0, 10.0$

田端・朴両氏の数値計算による.

A	$-\infty$		0	A_1		A_{2k-1}		A_{2k}		A_{2k+1}		$+\infty$
λ	$-\infty$	$\nearrow$		λ_1		λ_{2k-1}	$\searrow$	λ_{2k}	$\nearrow$	λ_{2k+1}		λ_∞

ここに $\lambda=\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ [$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$] にたいして，$A_j=A_{\mathrm{I},j}$ [$A_{\mathrm{II},j}$] は正の単調増大列．λ_j は表1に同じ．

iv) $10\leqq n$

A	$-\infty$		0	$+\infty$
λ_{I}	$-\infty$	$\nearrow$		$2(n-2)$

A	$-\infty$		0	$+\infty$
λ_{II}	$-\infty$	$\nearrow$		$2n$

注．いづれのばあいも $\lambda_{\mathrm{I}}(0;n)=\lambda_{\mathrm{II}}(0;n)=0$.

さらに $b(z;n)$ の函数論的な特徴は方程式(1.6)を局所的に簡単な方程式に還元する方法（木村，[7]，オ4章，及び M. Iwano [4]）によって詳しく調べることができる．その結論は§4に述べるが，特に次のことに注意したい．

4) $z\searrow -p=-p(n)$ のとき

(1.10) $$b(z;n)=\frac{4p}{n}(z+p)^{-2}+\frac{2(n-2)}{n}(z+p)^{-1}+\frac{2(n-2)(n-1)}{3np}\log(z+p)+\mathrm{const.}+O\left((z+p)|\log(z+p)|\right)$$

という評価が成立する．従って，動く特異点 $z=-p$ は，$n\neq1$，$n\neq2$ のとき，極でも代数的分岐点でもない．E. Hille のいう "pseudo-pole"（[4]）である．（注．$n=1,2$ のときは $b(z;1)=\mathrm{sech}^2\sqrt{z}$，$b(z;2)=(1+z/2)^{-2}$ となり，$z=-p(1)=-\pi^2/4$，$-p(n)=-2$ は極である）

以上が我々の主な結果である．

ところで，方程式(1.1)（あるいは(1.5)）は広い応用範囲

を持つ重要な方程式である．とくに天体物理学では重力平衡にある等温ガス球を記述する方程式として現われる（S. Chandrasekhar, [1], Chapter IV 参照）．例えば，$K>0$，$R>0$，$\rho_1>0$ が与えられたとき，

(1.11)
$$\begin{cases} \text{重力平衡の方程式：} \quad \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{r^2}{\rho}\dfrac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho, \\ \text{状態方程式：} \quad P = K\rho \end{cases}$$

を満たし，かつ半径 $r=R$ の点で密度 $\rho=\rho_1$ となる等温ガス球の密度分布は，$n=3$，$\lambda=4\pi GR^2\rho_1/K$ にたいする問題 I の解 $u(x)$ を用いて

(1.12) $$\rho = \rho_1 e^{u(r/R)} \qquad (0<r<R)$$

と与えられる；また，$K>0$，$R>0$，$M>0$ が与えられたとき，(1.11) を満たし，かつ半径 R の球内の総質量が M に等しい密度分布は，$n=3$，$\lambda=3GM/KR$ にたいする問題 II の解 $u(x)$ を用いて

(1.13) $$\rho = (3M/4\pi R^3)e^{u(r/R)}$$

と与えられる．以上の例は $\lambda>0$ に関するものだが，$\lambda<0$ のばあいも次のように応用される．いま

(1.14)
$$\begin{cases} f(t,x,\xi) = (2\pi)^{-n/2}e^{-|\xi|^2/2}e^{A}b(-\alpha\beta e^{A}|x|^2/2n\,;n) \\ \phi(t,x,\xi) = \dfrac{1}{\alpha}(A + \log b(-\alpha\beta e^{A}|x|^2/2n\,;n) \end{cases}$$

とおくと，(1.14) は Vlasov 方程式

$$(1.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \xi \nabla_x f + \alpha \nabla_x \phi \nabla_\xi f = 0 \\ \Delta_x \phi = \beta \int_{R^n} f(t,x,\xi)\, d\xi \end{cases}$$

の回転対称定常解を与えている．$\alpha\beta > 0$ のばあい（例えば，electron plasma のばあい $\alpha = -\varepsilon/m$，$\beta = -4\pi\varepsilon < 0$）は，解(1.14)は $|x| < \sqrt{2n\rho(n)e^{-A}/\alpha\beta}$ で存在し，$|x| \nearrow \sqrt{2n\rho(n)e^{-A}/\alpha\beta}$ のとき発散する．一方 $\alpha\beta < 0$ のばあいは解(1.14)は $|x| < \infty$ に存在し，

$$\begin{cases} f(t,x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \dfrac{2(n-2)}{|\alpha\beta|} e^{-|\xi|^2} |x|^{-2} \left(1 + O\left(|x|^{-\frac{n-2}{4}}\right)\right) \\ |\nabla_x \phi(t,x,\xi)| = \dfrac{2}{|\alpha|} |x|^{-1} \left(1 + O\left(|x|^{-\frac{n-2}{4}}\right)\right) \end{cases}$$

という挙動を $|x| \to \infty$ のときに示す．ただし，これは $n > 2$ のばあい（詳しくは§4参照）であり，$n = 2$ のときは

$$f(t,x,\xi) = (2\pi)^{-1} e^{-|\xi|^2/2} e^A \left(1 + \alpha\beta\, e^A |x|^2/8\right)^{-2},$$

$n = 1$ のときは

$$f(t,x,\xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-|\xi|^2/2} e^A \operatorname{sech}^2 \sqrt{\alpha\beta e^A}\, |x|^2/2$$

である．

岩野正宏氏，木村俊房氏にはいろいろご教示をいただきました．また，田端正久氏，朴恵子氏には数値計算をしていただきました．以上の方々の御好意に感謝いたします．

§2. 函数 $a(z;n)$，$b(z;n)$ の定義と性質

変数変換

(2.1) $z = \lambda r^2/2n, \quad b = e^u, \quad a = -\frac{d}{dz}\log b$

によって方程式(1.1)は1階連立方程式

(2.2) $\frac{2}{n} z \frac{da}{dz} = b - a, \quad z\frac{db}{dz} = -ab$,

あるいは b に関する単独2階有理的常微分方程式(1.6)に帰着する. この節では(2.2)の原点で正則な解の性質を調べる.

定理 1. 連立方程式(2.2)は

(2.3) $a(0) = 1, \quad b(0) = 1$

を満たす $z = 0$ で正則な解を一意に持つ. この解は $z = 0$ を中心とする巾級数

(2.4) $$\begin{cases} a(z) = 1 + \frac{n}{n+2}(-z) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j(n)(-z)^j, & a_j(n) > 0 \\ b(z) = 1 + (-z) + \sum_{j=2}^{\infty} b_j(n)(-z)^j, & b_j(n) > 0 \end{cases}$$

に展開され, その収束半径 $\rho(n)$ は次の不等式を満たす.

(2.5) $$\begin{cases} \frac{n}{n+2} \leqslant \rho(n) \leqslant 2 & (2 \leqslant n) \\ 2 \leqslant \rho(n) \leqslant \frac{n}{n+2} & (0 < n < 2) \end{cases}$$

証明. 形式巾級数 $a = 1 + \sum a_j(-z)^j$, $b = 1 + \sum b_j(-z)^j$ を方程式(2.2)に代入すると, 次の漸化式によって形式解が求まる:

$$a_{j+1} = \frac{n+j}{n+2j+2}\cdot\frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j} a_i a_{j-i}, \quad b_j = \frac{n+2j}{n}a_j, \quad j = 0, 1, \cdots$$

このとき帰納法により

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leqslant a_j \leqslant \left(\frac{n}{n+2}\right)^j & (2 \leqslant n) \\ \left(\frac{n}{n+2}\right)^j \leqslant a_j \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^j & (0 < n \leqslant 2) \end{cases}$$

が証明される. ゆえに形式解は(2.5)を満たす正の収束半径を

持ち，$|z|<\rho(n)$ で収束して真の解を与える．□

定義 1．定理 1 で定まる解を実軸上可能な限り延長したものを $a(z;n)$，$b(z;n)$ とする．

注．$n=1,2$ のときは

$$(2.6)\qquad \begin{cases} a(z;1)=z^{-1/2}\tanh z^{1/2} \\ b(z;1)=\operatorname{sech}^2 z^{1/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a(z;2)=(1+z/2)^{-1} \\ b(z;2)=(1+z/2)^{-2}. \end{cases}$$

変数変換

$$(2.7)\qquad \alpha=za,\quad \beta=zb$$

により方程式 (2.2) は Briot-Bouquet 型の方程式

$$(2.8)\qquad z\frac{d\alpha}{dz}=-\frac{n-2}{2}\alpha+\frac{n}{2}\beta,\quad z\frac{d\beta}{dz}=(1-\alpha)\beta$$

に帰着する．このとき独立変数を $t=\log(\pm z)$ に変えれば，

$$(2.8)'\qquad \frac{d\alpha}{dt}=-\frac{n-2}{2}\alpha+\frac{n}{2}\beta,\quad \frac{d\beta}{dt}=(1-\alpha)\beta$$

という 2 次元自律系になる．$n\neq 2$ ならば，自律系 (2.8)′ の特異点は

$$(2.9)\qquad O_1:(\alpha,\beta)=(0,0)\ \text{及び}\ O_2:(\alpha,\beta)=\left(1,\frac{n-2}{n}\right)$$

のふたつである．$a(z;n)$，$b(z;n)$ に対応する (2.8) の解を

$$(2.10)\qquad \alpha(z;n)=za(z;n),\quad \beta(z;n)=zb(z;n)$$

と記そう．この解の軌道は，関係式

$$(2.11)\qquad \beta=S(\alpha),\quad \text{ただし}\ S(\alpha)=\alpha-\frac{2}{n+2}\alpha^2+\sum_{j=3}^{\infty}s_j(n)\alpha^j$$

で定まる安定多様体であることに注意しておく．

そこで (2.10)′ に 2 次元自律系の幾何学的理論を適用して，

$a(z;n)$, $b(z;n)$の特徴づけを行ない，　その大域的挙動を調べることにしよう．

定理2．$u(r)$, $0<r<\delta$, が方程式(1.1)を満たすと仮定する．このとき，$u(r)$がさらに条件(1.2)を満たすためには，$u(r)$が$0\leqq r<\delta$で連続かつ

$$(2.12)\qquad u(r)=A+\log b(\lambda e^{A}r^2/2n\,;n)\,,\quad A=u(0)$$

となることが必要充分条件である．

証明．$u(r)$が方程式(1.1)の解であり条件(1.2)を満たすとする．変換(2.1), (2.7)により対応する(2.8)の解

$$(\alpha(z),\beta(z))=\left(-\frac{\lambda}{4n}r\frac{du}{dr},\ e^{u(r)}\right)_{r=(2nz/\lambda)^{1/2}}$$

を考える．条件(1.2)からこの解$(\alpha(z),\beta(z))$は$z\to 0$のとき特異点O_1に収束する．方程式(2.8)を

$$(2.13)\qquad z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{n-2}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1y_2+y_2^2\\ -y_1y_2-y_2^2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+y_2\\ y_2\end{pmatrix}$$

と変換すれば，O_1が$0<n<2$のとき結節点，$2<n$のとき鞍点であることがわかる．そこで，i) $2<n$のときは，鞍点O_1に収束する解はすべて安定多様体(2.12)に載るのだから，$\beta(z)=\beta(cz;n)$, $c=$定数，となり，(2.12)が成立つ．ii) $0<n<2$のときは，結節点O_1の近傍で方程式を線型化することができる（§5を参照）．従って$(\alpha(z),\beta(z))$に対して次の表現が成立つ：

$$\begin{cases} \alpha(z) = c_1 z^{\frac{2-n}{2}} - c_2 z + P_1(c_1 z^{\frac{2-n}{2}},\ c_2 z) \\ \beta(z) = c_2 z + P_2(c_1 z^{\frac{2-n}{2}},\ c_2 z). \end{cases}$$

ここに c_1, c_2 は定数であり，P_1, P_2 は$\underbrace{\text{収}}_{}$束する2重巾級数で(2次からはじまる)ある．もし $c_1 \neq 0$ ならば，

$$\frac{du}{dr} \sim const.\ r^{1-n},\quad const. \neq 0,$$

となって (1.2) に反する．ゆえに $c_1 = 0$，$\beta(z) = c_2 z + P_2(0, c_2 z) = \beta(c_2 z; n)$ となり，(2.12) が成立つ．iii) $n = 2$ のときは安定多様体 (2.12) は $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha$ であり，それ以外の軌道は O_1 を通らない放物線 $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha + c$, $c \neq 0$，に含まれる．従って，O_1 に収束するために，(2.12) が成立つ．

逆は明らかである．□

定理3．$a(z; n)$, $b(z; n)$ は $-\rho(n) < z < +\infty$ で定義され，単調減少かつ

$$(2.14)\qquad \begin{cases} a(z;n) \nearrow +\infty, & b(z;n) \nearrow +\infty \quad (z \searrow -\rho(n)) \\ a(z;n) \searrow 0, & b(z;n) \searrow 0 \quad (z \nearrow +\infty). \end{cases}$$

また対応する (2.8) の解 $\alpha(z; n)$, $\beta(z; n)$ は次の挙動を示す：

i) $0 < n < 2$ のとき

$$(2.15)\qquad \alpha(z;n) \nearrow +\infty,\quad \beta(z;n) \to 0 \quad (0 < z \nearrow +\infty);$$

ii) $2 < n$ のとき

$$(2.16)\qquad (\alpha(z;n),\ \beta(z;n)) \to \left(1,\ \frac{n-2}{n}\right) \quad (z \nearrow +\infty),$$

とくに $10 \leqq n$ のときは

(2.17) $\qquad \alpha(z;n) \nearrow 1 \qquad\qquad (-\rho(n) < z \nearrow +\infty)$;

iii) $0 < n < +\infty$ にたいして,

(2.18) $\qquad \alpha(z;n) \searrow -\infty, \quad \dfrac{\beta(z;n)}{\alpha(z;n)^2} \to -\dfrac{1}{n} \quad (0 > z \searrow -\rho(n))$.

証明. 以下 $a(z;n)$, $b(z;n)$, $\alpha(z;n)$, $\beta(z;n)$, $\rho(n)$ を $a(z)$, $b(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$, ρ と略す. 解 $(\alpha(z), \beta(z))$ の極大延長区間を $(-\rho, z^+)$ とする.

$-\rho < z < 0$ で $a(z)$, $b(z)$が単調減少であること, $z \searrow -\rho$で発散することは, $a_j(n) > 0$, $b_j(n) > 0$ (定理1) から明らかである. 一方, $0 < z < z^+$ において不等式

(2.19) $\qquad 0 < \beta(z) < \alpha(z) \qquad\qquad (0 < z < z^+)$

が成立することを示そう. (2.4)と(2.11)から不等式(2.19)は充分小さな $z > 0$ に対して成立する. $\beta \equiv 0$は(2.8)$'$の軌道であるから, 解の一意性により $z > 0$ において $\beta(z) = 0$ となることはない. ゆえに $\beta(z) > 0$. またもし $\alpha(z) > \beta(z)$ が成立つ zに最大値 $z_1 < z^+$があったと仮定すると, $\left.\dfrac{d}{dz}(\alpha - \beta)\right|_{z=z_1} = z_1\beta(z_1) > 0$ となって矛盾である. ゆえに (2.19) が成立つ. 不等式 (2.19) により, $\dfrac{da}{dz} = \dfrac{n}{2}(\beta - \alpha)$, $\dfrac{db}{dz} = -\dfrac{\alpha\beta}{z^2}$ に注意すれば, $a(z)$, $b(z)$ が $z > 0$ において 単調減少であることがわかる.

次に, (2.15), (2.16)とあわせて, $z^+ = +\infty$, $a(+\infty) = b(+\infty) = 0$ を示すことにする.

i) $0 < n < 2$ のばあい. $z > 0$ において $(\alpha(z), \beta(z))$ が次

の不等式を満たすことがわかる:

(2.20) $$0<\beta<\begin{cases}\alpha & (\alpha\leqslant 1)\\ \alpha e^{-\alpha+1} & (1\leqslant\alpha).\end{cases}$$

これから $\frac{d\alpha}{dz}>0$ となり，$\alpha(z)$ は単調増大である．もし，$\alpha(z)\nearrow\bar{\alpha}<+\infty$ ならば，解は $z\nearrow z^+$ のとき，特異点をひとつも含まぬコンパクト領域：$\frac{1}{2}\bar{\alpha}\leqslant\alpha\leqslant\bar{\alpha}$，$0\leqslant\beta\leqslant 1$ に留まることになるが，これは Poincaré の定理（[8]，p. 211，(9.3) 及び p. 190，(11.2)）から矛盾である．ゆえに $\alpha(z)\nearrow+\infty$．これと不等式 (2.20) から $\beta(z)\to 0$．さらに方程式から

$$\frac{z}{\alpha}\frac{d\alpha}{dz}=\frac{2-n}{2}+\frac{n}{2}\frac{\beta}{\alpha}\leqslant 1-\frac{n}{4}\qquad({}^{\exists}z_1<z<z^+)$$

となるから，$\alpha(z)\leqslant\text{const.}\,z^{1-\frac{n}{4}}$ が得られる．この評価と $\alpha(z)$ が発散することから，$z^+=+\infty$，$a(z)\leqslant\text{const.}\,z^{-\frac{n}{4}}\to 0$ $(z\nearrow+\infty)$，$b(z)=\beta(z)z^{-1}\to 0$ が成立つ．

ii) $2<n$ のばあいは，$(\alpha(z),\beta(z))$ が特異点 O_2 に収束することを確かめればよい．これは，Joseph & Lundgren（[5]）によって証明されているが，念のためここでも証明しておく．自律系 (2.8)′ を

(2.21) $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{n-2}{2} & \frac{n}{2}\\ -\frac{n-2}{n} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y_1y_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta-\frac{n-2}{n}\end{pmatrix}$$

と変換すれば，(2.21) の線型部分の固有値は

(2.22) $$\sigma_\pm=\frac{1}{4}\left(-(n-2)\pm\sqrt{(n-2)(n-10)}\right)$$

である．従って特異点 O_2 は $2<n<10$ のとき (2.8)′ の安定渦状点，$10\leqslant n$ のとき安定結節点である．一方，解 $(\alpha(z),\beta(z))$ は

次の不等式を満たすことがわかる：

(2.23) $\quad \beta < -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha.$

不等式 (2.19) と (2.23) から，解は $z \nearrow z^+$ のとき特異点 O_1 と O_2 とを含むあるコンパクト領域に留まる．極限集合は O_1 を含まないから，O_2 を含むか，あるいは閉軌道である（[8], p.221, (9.2)）．ところが (2.8)′ を半平面 $\beta>0$ で

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha\\ u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{n-2}{2}\alpha + \frac{n}{2}e^u\\ 1-\alpha\end{pmatrix}, \qquad u = \log\beta$$

と変換すると，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{n-2}{2}\alpha + \frac{n}{2}e^u\right) + \frac{\partial}{\partial u}(1-\alpha) = -\frac{n-2}{2}$$

が定符号となる．ゆえに Bendixson の判定条件（[8], p.227, (15.1)）により，$\beta>0$ には閉軌道はない．ゆえに $(\alpha(z), \beta(z))$ の極集合は O_2 1点からなり，$z^+ = +\infty$ で O_2 に収束する．

次に (2.17) を証明する．(2.8) は 2 階非線型常微分方程式

(2.24) $\quad \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{n-2}{2} - w\right)\frac{d}{dx}\right]w + \frac{n-2}{2}w(1-w) = 0, \quad \alpha = 1-w, \quad z = e^{-x}$

に変換されるが，とくに $10 \leqq n$ のときは，[6], Theorem 1.2 の条件が成立することが確められ，

(2.25) $\quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad 0 < w(x) < 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$

を満たす解が一意に存在する．これに対応する (2.8) の解

$$\begin{pmatrix}\alpha(z)\\ \beta(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-w\\ \frac{2}{n}\left[\frac{dw}{dx} + \frac{n-2}{2}(1-w)\right]\end{pmatrix}_{x=-\log z}$$

は，[6]，(1.75) より $z \searrow 0$ $(x \nearrow +\infty)$ で O_1 に収束する．ゆえにその軌道は安定多様体 (2.11) に他ならない．従って $\alpha(z;n) = 1 - w(-\log Cz)$ となる定数 C が存在し，(2.17) が (2.25) から得られる．

iii) 最後に $z \searrow -\rho$ のときの挙動 (2.19) を証明するため，少し複雑だが，(2.10) を次のように変換する：

(2.26) $$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1\left(\frac{n-2}{2}y_1 - \frac{n}{2}y_2\right) \\ -y_2(-1+(n-1)\quad y_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\beta}{\alpha^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{ds} = -\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}.$$

このとき，

$$s = \varphi(z) = -\int_0^z \frac{\alpha(\zeta)\,d\zeta}{\zeta},$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(z)} \\ \frac{\beta(z)}{\alpha(z)^2} \end{pmatrix}_{z=\varphi^{-1}(s)} \qquad (0 < s < s^+ = \varphi(-\rho))$$

は自律系 (2.26) の極大延長解である．自律系 (2.26) の特異点は，

$$Q_1 : (y_1, y_2) = (0, 0), \quad Q_2 : (y_1, y_2) = \left(0, -\frac{1}{n}\right), \quad O_2 : (y_1, y_2) = \left(1, \frac{n-2}{n}\right)$$

の３つである．(2.18) は，$(y_1(s), y_2(s))$ が $s \nearrow s^+$ のとき Q_2 に収束するという主張である．(2.14) により既に

(2.27) $$\begin{cases} y_1(s) < 0, \quad y_2(s) < 0; \quad y_1(s) \to 0 \quad (s \to s^+); \\ y_1(s) = -\frac{1}{s}(1 + O(s)), \quad y_2(s) = -\frac{1}{s}(1 + O(s)) \quad (s \to 0) \end{cases}$$

がわかっている．

まず，$y_2(s)$ が $s \nearrow s^+$ のとき有界であることを示そう．$0<$

$n \leqq 1$ のばあいは，(2.27) から $k > \frac{1}{n}$ を充分大きくとると，$y_2(s_1) > -k$ となる $s_1 > 0$ が存在する．$y_2(s) > -k$ となる s の最大値 $s_2 < s^+$ であったとすると，$\frac{d}{ds}(y_2+k)\Big|_{s=s_2} =$
$= k(-1-(1-n)y_1(s_2)+nk) > 0$ となって矛盾するから，$s > s_1$ において $-k < y_2(s) < 0$ が従う．一方 $1 < n$ のばあいは，不等式

$$-1+(n-1)y_1(s) - n y_2(s) > 0 \qquad (0 < s < s^+)$$

が成立する．なぜならば，(2.27) によりこの不等式は充分小さな s に対して成立ち，またこの不等式が成立つ s の最大値 $s_1 < s^+$ があったとすると，$\frac{d}{ds}(-1+(n-1)y_1 - n y_2)_{s=s_2} =$
$= \frac{y_1(s_2)}{2}(-1+y_1(s_2)) > 0$ となって矛盾だからである．(2.27) とこの不等式から $y_2'(s) > 0$ となり，このばあいも $y_2(s)$ は $s \nearrow s^+$ のとき有界である．

(2.27) と $y_1(s)$ が有界に留まることから，極限集合は負の y_1- 軸の有界な部分に含まれる．ゆえに Poincaré-Bendixson の定理 ([8], p.219, (8.1)) により，$(y_1(s), y_2(s))$ は Q_1 か Q_2 のどちらか一方に収束する．もし解が Q_1 に収束したとすると，充分大きな s に対して，$y_2'(s) = -y_2(s)(-1+(n-1)y_1(s) - n y_2(s)) < (1-\delta) y_2(s)$ (< 0) となって矛盾である．ゆえに解 $(y_1(s), y_2(s))$ は Q_2 に収束する．□

§3. 問題Ⅰ，問題Ⅱの解の公式と分岐ダイアグラム

定理3により函数 $z \to a(z;n)$ [$z \to b(z;n)$] は半直線 $(-\rho(n), +\infty)$ を実数全体の上に1：1解析的に変換する．ゆえにその逆函数 $a^{-1}(\cdot\,;n)$ [$b^{-1}(\cdot\,;n)$] を用いて次の定義が可能になった．

定義2．$-\infty < A < +\infty$ の実解析函数 $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$, $\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$ を

$$(3.1)_{\mathrm{I}} \qquad \lambda_{\mathrm{I}}(A;n) = 2ne^{-A}\, b^{-1}(e^{-A};n)$$

$$(3.\ \ )_{\mathrm{II}} \qquad \lambda_{\mathrm{II}}(A;n) = 2n\, e^{-A}\, a^{-1}(e^{-A};n)$$

と定義する．

いま $u(r)$ が問題Ⅰの解であるとする．このとき条件(1.2)から定理2により

$$(2.12) \qquad u(r) = A + \log b(\lambda e^{A} r^2/2n\,;n), \quad u(0) = A$$

が成立する．従って条件(1.3)は

$$0 = A + \log b(\lambda e^{A}/2n\,;n)$$

となる．これは $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ の定義 $(3.1)_{\mathrm{I}}$ から条件

$$(1.8)_{\mathrm{I}} \qquad \lambda = \lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$$

に他ならない．逆に，$(1.8)_{\mathrm{I}}$ を満たす A にたいして (2.12) で定義される $u(r)$ は問題Ⅰの解を与える．

$u(r)$ が問題Ⅱの解であるとする．このとき条件(1.2)から定理2によってやはり(2.12)が成立する．条件(1.4)は方程式

(1.1)を利用して変形すると

$$\frac{\lambda}{n}=\int_0^1 \lambda e^{u(r)} r^{n-1} dr = -\int_0^1 \frac{d}{dr} r^{n-1}\frac{du}{dr} dr = -\frac{du}{dr}\Big|_{r=1} + \lim_{r\to 0} r^{n-1}\frac{du}{dr}$$

$$= -\frac{du}{dr}\Big|_{r=1} = \frac{\lambda e^A}{n} a(\lambda e^A/2n\,;n)$$

となる．これは $\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$ の定義 $(3.1)_{\mathrm{II}}$ から条件

$(1.8)_{\mathrm{II}}$ $\qquad \lambda=\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$

に他ならない．逆に $(1.8)_{\mathrm{II}}$ を満たす A にたいして (2.12) は問題 II の解を与える．

ゆえに

定理 4．$u(r)$ が問題 I [問題 II] の解となるためには，

(2.12) $\qquad u(r)=A+\log b(\lambda e^A r^2/2n\,;n)$, $\; u(0)=A$

かつ

$(1.8)_{\mathrm{I\,[II]}}$ $\qquad \lambda=\lambda_{\mathrm{I}}(A;n) \qquad [\lambda=\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)]$

となることが必要充分である．

定理 4 により問題 I [問題 II] の解の個数は方程式 $(1.8)_{\mathrm{I\,[II]}}$ の解の個数に帰着した．函数 $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ [$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$] の大域的挙動を調べて分岐ダイアグラムを完成しよう．以下混同のおそれがないときは函数記号の中のパラメータ n は略す．

いま

(3.2) $\qquad \xi_{\mathrm{I}}(A)=b^{-1}(e^{-A})$. $\qquad [\ \xi_{\mathrm{II}}(A)=a^{-1}(e^{-A})\ ]$

とおくと，定理 3 から $\xi=\xi_{\mathrm{I}}(A)$ [$\xi_{\mathrm{II}}(A)$] の増減は次の表のようになる：

A	$-\infty$		0		$+\infty$
z	$-p$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

さらに

(3.3) $\lambda_{\mathrm{I}}(A)=2m\beta(z_{\mathrm{I}}(A))$, $[\lambda_{\mathrm{II}}(A)=2m\alpha(z_{\mathrm{II}}(A))]$

が成立つことに注意して

(3.4) $\mu_{\mathrm{I}}(A)=\dfrac{1}{\alpha(z_{\mathrm{I}}(A))}$ $\left[\mu_{\mathrm{II}}(A)=\dfrac{2}{n}\dfrac{\alpha(z_{\mathrm{II}}(A))}{\beta(z_{\mathrm{II}}(A))-\alpha(z_{\mathrm{II}}(A))}\right]$

とおくと，方程式 (2.8) から $(\lambda_{\mathrm{I}}(A), \mu_{\mathrm{I}}(A))$ $[(\lambda_{\mathrm{II}}(A), \mu_{\mathrm{II}}(A))]$ が満たす次の自律系が導かれる：

$(3.5)_{\mathrm{I}}$ $\dfrac{d\lambda_{\mathrm{I}}}{dA}=(\mu_{\mathrm{I}}-1)\lambda_{\mathrm{I}}$, $\dfrac{d\mu_{\mathrm{I}}}{dA}=-\dfrac{1}{4}\mu_{\mathrm{I}}^2(\lambda_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}-2(m-2))$;

$[(3.5)_{\mathrm{II}}$ $\dfrac{d\lambda_{\mathrm{II}}}{dA}=(\mu_{\mathrm{II}}-1)\lambda_{\mathrm{II}}$, $\dfrac{d\mu_{\mathrm{II}}}{dA}=\dfrac{1}{4}\mu_{\mathrm{II}}^2(\mu_{\mathrm{II}}-\dfrac{2}{n})(\lambda_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}}-2n)$.

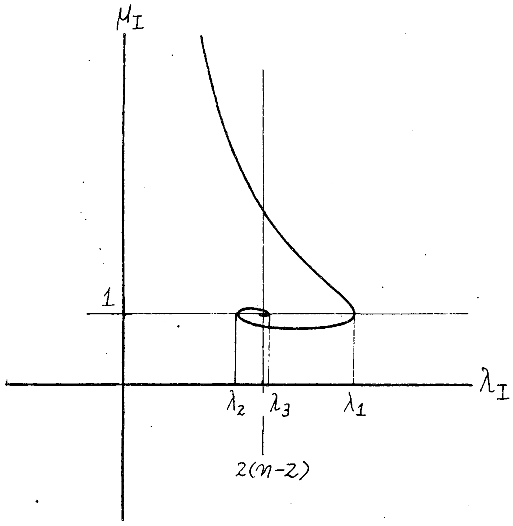
これを利用して

定理5. $\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$ $[\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)]$ の増減は表2のようになる. (p. 4～5参照)

証明. まず $A<0$ においては，$\lambda_{\mathrm{I}}(A)<0$，$\mu_{\mathrm{I}}(A)<0$，$\lambda_{\mathrm{II}}(A)<0$，$\mu_{\mathrm{II}}(A)<0$. (3.3), (3.4) により $\alpha(z)$, $\beta(z)$ の挙動に帰着させれば明らかである. ゆえに $A<0$ のとき $\lambda_{\mathrm{I}}(A)$, $\lambda_{\mathrm{II}}(A)$ はともに負かつ単調減少である. したがって，$A>0$ のときを考えよう. i) $0<m<2$ のばあい. まず $\lambda_{\mathrm{I}}(A)>0$，$\mu_{\mathrm{I}}(A)>0$ から $\dfrac{d\mu_{\mathrm{I}}}{dA}=-\dfrac{1}{4}\mu_{\mathrm{I}}^2(\lambda_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}}+2(2-n))>0$ となり，$\mu_{\mathrm{I}}(A)$ は単調減少である. ゆえに方程式 $\mu_{\mathrm{I}}(A)-1=0$ はただ1つの解 $A=A_1$ を持つ $(A_1=z_{\mathrm{I}}^{-1}\alpha^{-1}(1))$. ゆえに $A<A_1$ のとき $\lambda_{\mathrm{I}}(A)$ は単調増大,

$A_1 < A$ のとき単調減少で，$\lambda_1 = \lambda_I(A_1)$ が最大値となる．一方，$\lambda_{II}(A) = 2n\alpha(z_{II}(A))$ は $\alpha(z)$ と同様に単調増大である（定理3．i)）．

ii) $2 < n < 10$ のばあい．$\mu_I(A)$ は A の解析函数であり，$\mu_I(A) - 1 = \frac{1}{A}(1 + O(A))$ $(A \to 0)$ かつ $(\lambda_I(A), \mu_I(A))$ は $(3,5)_I$ の安定渦状点 $(\lambda_I, \mu_I) = (2(n-2), 1)$ にまきつく．ゆえに A に関する方程式 $\mu(A) - 1 = 0$ は可算無限個の解を持つ．これを小さい順に A_j, $j = 1, 2, \cdots$, $A_j < A_{j+1}$, とし，$\lambda_j = \lambda_I(A_j)$ とおく．このとき，解の一意性から $\lambda_j \neq 2(n-2)$ である．したがって



$$\left(\frac{d\mu}{dA}\right)_{A=A_j} = -\frac{1}{4}(\lambda_j - 2(n-2)) \neq 0 \text{ であるから，}$$

$$\begin{cases} A < A_1 \text{ か } A_{2k} < A < A_{2k+1} \text{ ならば } \mu_I(A) - 1 > 0,\ \frac{d\lambda_I}{dA} > 0; \\ A_{2k-1} < A < A_{2k} \text{ ならば } \mu_I(A) - 1 < 0,\ \frac{d\lambda_I}{dA} < 0; \\ \left(\frac{d\mu}{dA}\right)_{A=A_{2k-1}} < 0, \quad \lambda_{2k-1} - 2(n-2) > 0; \\ \left(\frac{d\mu}{dA}\right)_{A=A_{2k}} > 0, \quad \lambda_{2k} - 2(n-2) < 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

ここで (λ_I, μ_I)-平面上の線分 I_- : $\mu_I = 1$, $0 < \lambda_I < 2(n-2)$ [I_+ : $\mu_I = 1$, $2(n-2) < \lambda_I$] を考えると，I_- [I_+] 上で $\frac{d\mu_I}{dA} = -\frac{1}{4}(\lambda_I - 2(n-2))$ は定符号となる．この線分と解曲線 $(\lambda_I(A), \mu_I(A))$ との交点が A に関して単調に $(\lambda_{2k}, 1)$ [$(\lambda_{2k-1}, 1)$], $k = 1, 2, \cdots$ である．

ゆえに，[8]，p. 217，Lemma (6, 2) により λ_{2k} [λ_{2k-1}] も単調である．従って $\lambda_{2k} \nearrow 2(n-2)$，$\lambda_{2k-1} \searrow 2(n-2)$ ($1 \leq k \nearrow \infty$) となる．$\lambda_{\mathrm{II}}(A)$ についても同様である．iii) $10 \leq n$ のばあい．定理 3，(2.17) から $\frac{d\lambda_{\mathrm{I}}}{dA} = (\mu_{\mathrm{I}} - 1)\lambda_{\mathrm{I}} > 0$ となり $\lambda_{\mathrm{I}}(A)$ は単調である．また，$\lambda_{\mathrm{II}}(A) = 2n\alpha(z_{\mathrm{II}}(A))$ も (2.17) から単調である．□

$\lambda_{\mathrm{I}}(A)$ [$\lambda_{\mathrm{II}}(A)$] の挙動についてこれだけの情報があれば，問題 I [問題 II] の解の個数の表 (p. 2，表 1) を得るに充分である．

§4. $b(z;n)$，$\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$，$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$ の漸近展開

この節では，方程式 (2.8)，$(3.5)_{\mathrm{I}}$，$(3.5)_{\mathrm{II}}$ を特異点の近傍で簡単な方程式に変換することによって，$b(z;n)$，$\lambda_{\mathrm{I}}(A;n)$，$\lambda_{\mathrm{II}}(A;n)$ の詳しい局所的挙動を調べる．以下函数記号の中のパラメータ n は略し，$p(n)$ を p と略す．

まず $z \nearrow +\infty$ ($A \nearrow +\infty$) のときの挙動を調べよう．

1) $2 < n$ のばあい．定理 3，i) より $(\alpha(z), \beta(z))$ は特異点 $O_2 : (\alpha, \beta) = (1, \frac{n-2}{n})$ に収束する．自律系 (2.8) を次のように書きなおそう：$n \neq 10$ のばあい

$$(4.1) \qquad z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

ただし

$$(4.2)\qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{n-2}{n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma_+ & \sigma_-\\ -\frac{n-2}{n} & -\frac{n-2}{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix};\qquad \begin{aligned}&\sigma_\pm=\frac{1}{4}\left(-(n-2)\pm\sqrt{(n-2)(n-10)}\right),\\ &g_1=\frac{\sigma_-}{\sigma_+-\sigma_-}(\sigma_+y_1+\sigma_-y_2)(y_1+y_2),\\ &g_2=-\frac{\sigma_+}{\sigma_+-\sigma_-}(\sigma_+y_1+\sigma_-y_2)(y_1+y_2).\end{aligned}$$

$n=10$ のばあいは,

$$(4.3)\qquad z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(y_1+y_2)(-2y_1-y_2)\\ 2(y_1+y_2)(-2y_1-y_2)\end{pmatrix},$$

ただし

$$(4.4)\qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\qquad \sigma_\pm=-2.$$

固有値の実部はいつも負である. 従って, 関係式

$$(4.5)\qquad j_1\sigma_+ + j_2\sigma_- = \sigma_+ \text{ or } \sigma_-,\quad j_1+j_2\geqq 2$$

の成立するような非負の整数の組 j_1, j_2 が存在しない限りは, よく知られているように変換

$$(4.6)\qquad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+P_1(u_1,u_2)\\ u_2+P_2(u_1,u_2)\end{pmatrix},$$

によって (4.1) を $(0,0)$ の近傍において線型方程式

$$(4.7)\qquad z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_+ & 0\\ 0 & \sigma_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

に還元することができる. ただし, $P=P_l(u_1,u_2)$, $l=1,2$, は2次からはじまる収束する2重巾級数である. この変換の構成及び証明は, [7], P.86, 定理4.2 を参照. 一方, (4.5) を満たす非負の整数の組 j_1, j_2 が存在するのは,

$$n = n(m) = \frac{2(m^2+3m+1)}{m}, \quad m = 2, 3, \cdots \tag{4.8}$$

のときだけであり，このときは $\sigma_- = m\sigma_+$ となる．このばあいは一般には必ずしも線型化はできないが，やはり (4.6) の形の変換により求積法で解ける方程式

$$z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & m\sigma_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h u_1^m \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

に帰着させることができる．ただし，h は (4.1) の非線型項の第2成分 $g_2(y_1, y_2)$ の y_2^m の項の係数である．この変換を形式的に構成することができ（[7], p. 83, 定理4.2），その収束を先に倣って優級数法で証明すればよい．今のばあいは実際に $h \neq 0$ となるのは $n = n(2) = 11$ のときだけで，あとは線型化される．さらに，$n = 10$ のときは線型部分が対角化できないが，このばあいも変換 (4.6) で線型化できる．このようにして $(\alpha(z), \beta(z))$ の $z \nearrow +\infty$ における展開が得られる．従って，

定理 6．$2 < n$ のばあい，n に依存する定数 C_1, C_2，及び2次からはじまる収束2重巾級数 $\mathfrak{P}(u_1, u_2)$ があって，$b(z)$ は z が充分大きいとき次のように表現される．i) $2 < n < 10$ のばあい

$$b(z) = \frac{n-2}{n} z^{-1}\Big\{1 - 2C_1 z^{-\frac{n-2}{4}} \cos\Big(\frac{\sqrt{(n-2)(10-n)}}{4}\log z + C_2\Big) + \mathfrak{P}\big[C_1 e^{\sqrt{-1}C_2} z^{\sigma_+}, C_1 e^{-\sqrt{-1}C_2} z^{\sigma_-}\big]\Big\}, \tag{4.10}$$

ii) $10 < n$ かつ $n \neq 11$ のばあい

(4.11) $$b(z)=\frac{n-2}{n}z^{-1}\{1-c_1z^{\sigma_+}-c_2z^{\sigma_-}+P[c_1z^{\sigma_+},c_2z^{\sigma_-}]\};$$

iii) $n=10$のばあい

(4.12) $$b(z)=\frac{4}{5}z^{-1}\{1-(c_1\log z+c_2)z^{-2}-c_1z^{-2}+ +P[(c_1\log z+c_2)z^{-2},\ c_1z^{-2}]\};$$

iv) $n=11$ のばあい

(4.13) $$b(z)=\frac{9}{11}z^{-1}\{1-c_1z^{-\frac{3}{2}}-(-\tfrac{3}{2}c_1^2\log z+c_2)z^{-3}+ +P[\ c_1z^{-\frac{3}{2}},\ (-\tfrac{3}{2}c_1^2\log z+c_2)z^{-3}]\}$$

注. $10\leqslant n$ のときは, [6], Theorem 1.2 を定理3のばあいと同様に(p.15参照)適用すると, $c_1>0$が得られる.

$a(z)$ も同時に展開される. そこでさらに陰函数の定理を応用した計算([9], p.308, Lemma参照)によって $z_I(A)$ $[z_{II}(A)]$ の展開が得られる. それにより, $\lambda_I(A)$ $[\lambda_{II}(A)]$ の展開が得られる:

定理6'. $2<n$のばあい,収束する2重巾級数$P_I(u_1,u_2)$,$P_{II}(u_1,u_2)$があって, $\lambda_I(A)$, $\lambda_{II}(A)$ は. Aが充分大きいとき次のように表現される: i) $2<n<10$ のばあい, $C=c_1e^{\sqrt{-1}c_2}$, $C^*=c_1e^{-\sqrt{-1}c_2}$として,

(4.14) $$\begin{cases}\lambda_I(A)=2(n-2)\{1-2\operatorname{Re}C(\frac{n-2}{n})^{\sigma_+}e^{\sigma_+A}+P_I[Ce^{\sigma_+A},\ C^*e^{\sigma_-A}]\}\\ \lambda_{II}(A)=2n\{1+2\operatorname{Re}\sigma_+Ce^{\sigma_+A}+P_{II}[Ce^{\sigma_+A},\ C^*e^{\sigma_-A}]\}\end{cases}$$

ii) $10<n$, $n\neq11$ のばあい

(4.15) $$\begin{cases}\lambda_I(A)=2(n-2)\{1-c_1(\frac{n-2}{n})^{\sigma_+}e^{\sigma_+A}-c_2(\frac{n-2}{n})^{\sigma_-}e^{\sigma_-A}+P_I[c_1e^{\sigma_+A},\ c_2e^{\sigma_-A}]\}\\ \lambda_{II}(A)=2n\{1+\sigma_+c_1e^{\sigma_+A}+\sigma_-c_2e^{\sigma_-A}+P_{II}[c_1e^{\sigma_+A},\ c_2e^{\sigma_-A}]\}\end{cases}$$

iii) $n=10$ のばあい

$$
(4.16)\qquad
\begin{cases}
\lambda_{\mathrm{I}}(A) = 16\Big\{1 - \frac{25}{16}c_1 e^{-2A} - \frac{25}{16}e^{-2A}\left(c_1 A + c_2 - c_1 \log\frac{5}{4}\right) + \\
\qquad + P_{\mathrm{I}}\left[c_1 e^{-2A},\ e^{-2A}\left(c_1 A + c_2 - c_1 \log\frac{5}{4}\right)\right]\Big\} \\
\lambda_{\mathrm{II}}(A) = 20\Big\{1 - \frac{1}{2}c_1 e^{-2A} - e^{-2A}(c_1 A - c_2) + \\
\qquad + P_{\mathrm{II}}\left[c_1 e^{-2A},\ e^{-2A}(c_1 A - c_2)\right]\Big\}
\end{cases}
$$

iv) $n=11$ のばあい

$$
(4.17)\qquad
\begin{cases}
\lambda_{\mathrm{I}}(A) = 18\Big\{1 - \left(\frac{11}{9}\right)^{3/2} c_1 e^{-3A/2} + \left(\frac{11}{9}\right)^3 e^{-3A}\left(\frac{2}{3}c_1^2 A - c_2 - \frac{2}{3}c_1^2 \log\frac{11}{9}\right) \\
\qquad + P_{\mathrm{I}}\left[c_1 e^{-3A/2},\ e^{-3A}\left(\frac{2}{3}c_1^2 A - c_2 - \frac{2}{3}c_1^2 \log\frac{11}{9}\right)\right]\Big\} \\
\lambda_{\mathrm{II}}(A) = 22\Big\{1 - \frac{3}{2}c_1 e^{-3A/2} - \frac{9}{2}e^{-3A}\left(c_1^2 A - \frac{2}{3}c_2\right) + \\
\qquad + P_{\mathrm{II}}\left[c_1 e^{-3A/2},\ e^{-3A}\left(c_1^2 A - \frac{2}{3}c_2\right)\right]\Big\}.
\end{cases}
$$

2) 次に $0<n<2$ のばあいを考える．(2.8) を次のように書きなおす：

$$
(4.18)\qquad y_1 z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2-n}{2}y_1^2 - \frac{n}{2}y_1^2 y_2 \\ (-1+y_1)y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_1} \\ y_2 \end{pmatrix}.
$$

定理3, i) により，解 $(y_1(z), y_2(z)) = \left(\frac{1}{\alpha(z)}, \beta(z)\right)$ は $z \nearrow +\infty$ のとき $y_1(z)>0$ を満たしつつ特異点 $(y_1, y_2)=(0,0)$ に収束する．しかし，(4.18) の右辺の線型部分は固有値が $0, -1$ であり退化している．このような0-固有値を持つ Briot-Bouquet 型の特異点の理論は，一般的に M. Iwano [4] により展開されており，(4.18) はその最も簡単なばあいに当る．(4.18) は，変換

(4.19) $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1+P_1(u_1,u_2)) \\ u_2(1+P_2(u_1,u_2)) \end{pmatrix}$$

によって

(4.20) $$u_1 z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2-n}{2}u_1^2 \\ (-1+u_1)u_2 \end{pmatrix}$$

に帰着する．ただし，$P(u_1,u_2)=P_\ell(u_1,u_2)$, $\ell=1,2$, は次のような性質をもつ函数である．

(4.21)
$\delta>0$, $\theta>0$ があって，$P(u_1,u_2)$ は $u_1\in S=\{0<|u_1|<\delta, |\arg u_1|<\theta\}$, $u_2\in D=\{|u_2|<\delta\}$ の有界解析函数であり，

$$P(u_1,u_2)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k(u_1)u_2^k$$

と展開され，かつ $p_k(u_1)$, $k=1,2,\cdots$, は $S\ni u_1\to 0$ で正しい漸近展開

$$p_k(u_1)\sim\sum_{j=0}^{\infty} p_{kj}u_1^j$$

を持つ．

変換 (4.19) の構成の概略を示そう．まず次の偏微分方程式系を考える．

(4.22) $$\begin{cases} \left[-h u_1^2\frac{\partial}{\partial u_1}+(-1+u_1)u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right]P_1=-\frac{n}{2}u_1u_2(1+P_1)(1+P_2) \\ \left[-h u_1^2\frac{\partial}{\partial u_1}+(-1+u_1)u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right]P_2=P_1+\dfrac{P_1(P_2-P_1)}{1+P_1}. \end{cases}$$

(4.22) が性質 (4.21) を持つ解 $(P_1(u_1,u_2), P_2(u_1,u_2))$ を持てば，(4.20) の一般解 $u_1=\frac{1}{C_1}z^{-h}$, $u_2=C_2 z\exp(-\frac{1}{h}C_1z^h)$ を (4.19)

に代入したものが (4.18) の解を与える. ただし, $h=\frac{2-n}{2}>0$.
そこで, (4.22) の解を次の手順で構成する. まず

$$(4.23)\qquad P_\ell=\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(\ell)}(u_1)u_2^k,\quad \ell=1,2$$

を方程式 (4.22) に代入し, u_2 の巾について形式的に整理すると, u_1 の函数列に対する線型方程式の列

$$(4.24)_k\qquad \left[-hu_1^2\frac{d}{du_1}+k(-1+u_1)\right]\begin{pmatrix} p_k^{(1)} \\ p_k^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_k^{(1)} \\ p_k^{(1)}+h_k^{(2)} \end{pmatrix},$$

$k=1,2,\cdots$ が生じる. ここに $h_k^{(\ell)}$, $\ell=1,2$, は, $(p_K^{(1)}, p_K^{(2)})$, $K=1,2,\cdots,k-1$ のみの多項式であることに注意して $(4.24)_k$ の解を逐次決めてゆく. このとき, u_1 の領域の列 $S_k=\{0<|u_1|<\delta_k, |\arg u_1|<\theta_k\}\searrow S=\{0<|u_1|<\delta, |\arg u_1|<\theta\}$ を適当にとれば次のことが成立する: もし $(h_k^{(1)}, h_k^{(2)})$ が $S_{k-1}\ni u_1$ の有界解析函数でありかつ $S_{k-1}\ni u_1\to 0$ のとき u_1 の巾級数で(漸近)展開できるならば, $(4.24)_k$ は $S_k\ni u_1\to 0$ のとき u_1 の巾級数で漸近展開できる $u_1\in S_k$ の有界解析函数の解 $(p_k^{(1)}, p_k^{(2)})$ を一意に持ち, かつそれは次の評価を満たす:

$$(4.25)_k\qquad \begin{cases} \|p_k^{(1)}\|\leqslant \frac{1}{(1-\delta)k}\|h_k^{(1)}\| \\ \|p_k^{(2)}\|\leqslant \frac{1}{(1-\delta)k}\left\{\|p_k^{(1)}\|+\|h_k^{(2)}\|\right\}. \end{cases}$$

ただし $\|\cdot\|$ は S 上での最大値をあらわす. このようにして, 解 $(p_k^{(1)}, p_k^{(2)})$, $k=1,2,\cdots$ を決めたとする. (4.23) の収束を証

するために次の方程式を考える．

$$(4.26)\qquad \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\frac{1}{1-\delta}\begin{pmatrix}\frac{n}{2}\delta\xi(1+\phi_1)(1+\phi_2)\\ \phi_1+\dfrac{\phi_1(\phi_2+\phi_1)}{1-\phi_1}\end{pmatrix}.$$

このとき陰函数の定理により，(4.26)は正の収束半径 δ' を持つ巾級数解

$$\phi_l=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k^{(l)}\xi^k,\qquad \phi_1^{(1)}=\frac{n}{2}\frac{\delta}{1-\delta},\ \phi_1^{(2)}=\frac{n}{2}\frac{\delta}{(1-\delta)^2}$$

を持つ．(4.26)と $(4.25)_k$ を比較すれば

$$(4.27)\qquad \|\varphi_k^{(l)}\|\leqslant \phi_k^{(l)},\quad l=1,2,\quad k=1,2,\cdots$$

が成立することがわかる．ゆえに δ を小さくとりなおせば，(4.23) は $u_1\in S$, $u_2\in D$ で性質 (4.21)を持ち，方程式(4.22)の真の解を与える．それゆえ，次の補題を用いれば，(4.19)の解 $(y_1(z), y_2(z))=(\frac{1}{\alpha(z)}, \beta(z))$ にたいし正の数 C_1, C_2 があって充分大きな $z>0$ に対して

$$\begin{cases} y_1(z)=u_1\{1+P_1(u_1,u_2)\},\\ y_2(z)=u_2\{1+P_2(u_1,u_2)\},\\ u_1=\dfrac{1}{C_1}z^{-h},\quad u_2=C_2\,z\exp\left(-\frac{1}{h}C_1z^h\right)\end{cases}$$

という表現が成立することがわかる．

補題 $P_l(u_1,u_2)$, $l=1,2$, が性質 (4.21) を持つ函数のとき，

$$(4.28)\qquad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1(1+P_1(u_1,u_2))\\ u_2(1+P_2(u_1,u_2))\end{pmatrix}$$

と表現される変換 $(u_1, u_2) \to (y_1, y_2)$ は，δ'，θ' を適当にとるとき $y_1 \in \{0<|y_1|<\delta', |\arg y_1|<\theta'\}$，$y_2 \in \{|y_2|<\delta'\}$ で定義された逆変換をもつ．それはまた性質 (4.21) を持つ函数 $P_l(y_1, y_2)$，$l=3,4$，によって

$$(4.29) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(1+P_3(y_1, y_2)) \\ y_2(1+P_4(y_1, y_2)) \end{pmatrix}$$

と表現される．

証明．任意の $\theta'<\theta$ に対して，δ' を充分小さくとるとき，$y_1 \in S'=\{0<|y_1|<\delta', |\arg y_1|<\theta'\}$，$y_2 \in D'=\{|y_2|<\delta'\}$ で定義された逆変換 $(u_1, u_2)=(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2))$ で評価

$$(4.30) \qquad \begin{cases} |\varphi_1(y_1, y_2)-y_1| \leqq C|y_1|\cdot|y_2| \\ |\varphi_2(y_1, y_2)-y_2| \leqq C|y_2|^2 \end{cases}$$

を一様に満たすものを構成することは容易である．そこでこれらの函数が (4.29) の表現をもつことを示そう．(4.30) から $\varphi_l(y_1, y_2)$ は $y_1 \in S'$ のとき $y_2 \in D'$ に関して一様に有界な解析函数であるから，

$$(4.31) \qquad \begin{cases} \varphi_1(y_1, y_2) = y_1\{1+\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1)}(y_1)y_2^k\} \\ \varphi_2(y_1, y_2) = y_2\{1+\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2)}(y_1)y_2^k\} \end{cases}$$

と展開される．このとき $\varphi_k^{(l)}(y_1)$ は $y_1 \in S'$ の解析函数であって，次の評価を満たす．

$$|\varphi_k^{(1)}(y_1)| \leqq \frac{C}{(\delta')^k} \qquad (y_1 \in S')$$

そこで，

(4.32) $\quad P_3(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1)}(y_1) y_2^k, \quad P_4(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2)}(y_1) y_2^k$

が性質(4.21)を持つことを示すためには，$\varphi_k^{(\ell)}(y_1)$, $\ell = 1, 2$, $k = 1, 2, \cdots$ が $S' \ni u_1 \to 0$ で成立する u_1 の巾級数による漸近展開を持つことを示せればよい．P_3, P_4 は次の方程式を満たしている：

(4.33) $\quad \begin{cases} -P_3 = (1+P_3)P_1(y_1(1+P_3), \ y_2(1+P_4)) \\ -P_4 = (1+P_4)P_2(y_1(1+P_3), \ y_2(1+P_4)) \end{cases}$

この右辺は，y_2, P_3, P_4 の，y_1 の函数を係数とする収束する3重巾級数 $\sum_{j_0+j_1+j_2 \geq 1} q_{j_0 j_1 j_2}^{(\ell)}(y_1) \Phi^{j_0} P_3^{j_1} P_4^{j_2}$ に展開され，各係数 $q_{j_0 j_1 j_2}^{(\ell)}$ は P_1, P_2 の展開係数 $p_{i_1 i_2}^{(\ell)}$ 及びそれらの導函数の高々有限個の多項式である．従って，(4.32)を(4.33)に代入し y_2 の巾の係数を比較すれば，$(\Phi_k^{(1)}, \Phi_k^{(2)})$ が高々有限個の P_1, P_2 の係数函数及びその導函数と $(\Phi_K^{(1)}, \Phi_K^{(2)})$, $K = 1, \cdots, k-1$ のの多項式で逐次決まることがわかる．従って帰納的に $\Phi_k^{(\ell)}$ も y_1 の巾級数に漸近展開できる．□

このようにして次の定理を得る．

定理7．$0 < n < 2$ のばあい，定数 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ 及び(4.21)の性質をもつ函数 $P(u_1, u_2)$ があって，$z > 0$ が充分大きいとき $b(z)$ は次のように表現される．

(4.22) $\quad b(z) = C_2 \exp\left(-\frac{2}{2-n} C_1 z^{\frac{2-n}{2}}\right) \left\{1 + P\left(\frac{1}{C_1} z^{-\frac{2-n}{2}}, \ C_2 z \exp\left(-\frac{2}{2-n} C_1 z^{\frac{2-n}{2}}\right)\right)\right\}.$

表現(4.22)と同時に $a(z)$ も

$$a(z)= c_1 z^{-(1-h)}\{1+P_1(u_1,u_2)\}, \tag{4.23}$$
ただし $u_1=\frac{1}{c_1}z^{-h}$, $u_2=c_2c_1^{-\frac{1}{h}}\exp\left(-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{u_1}+\log u_1\right)\right)$,
$h=\frac{2-n}{2}$.

という形に表現できる. (4.22)及び(4.23)から $\lambda_{\mathrm{I}}(A)$, $\lambda_{\mathrm{II}}(A)$ の同様の表現を求めることができる. 以下しばらく $P_\ell(u_1,u_2)$, $\ell=1,2,\cdots$ は性質(4.21)を持つ函数とする. まず, (4.22)から,

$$\begin{cases} \zeta_1=-\left[h\log(c_2^{-1}b)\right]^{-1}, & \zeta_2=c_2c_1^{-\frac{1}{h}}\exp\left(-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta_1}+\log\zeta_1\right)\right), \\ u_1=(c_1^{\frac{1}{h}}z)^{-h}, & u_2=c_2c_1^{-\frac{1}{h}}\exp\left(-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{u_1}+\log u_1\right)\right) \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} \zeta_1=u_1\{1+P_2(u_1,u_2)\} \\ \zeta_2=u_2\{1+P_3(u_1,u_2)\} \end{cases}$$

という関係が成立する. このとき先の補題を適用することができるから,

$$\begin{cases} u_1=\zeta_1\{1+P_4(\zeta_1,\zeta_2)\} \\ u_2=\zeta_2\{1+P_5(\zeta_1,\zeta_2)\} \end{cases}$$

という表現が成立する. $b=e^{-A}$, $z=z_{\mathrm{I}}(A)$ を代入すれば

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{I}}(A) &= c_1^{-\frac{1}{h}}\zeta_1^{-\frac{1}{h}}\{1+P_4(\zeta_1,\zeta_2)\}^{-\frac{1}{h}} \\ &= c_1^{-\frac{1}{h}}h^{\frac{1}{h}}(A+\log c_2)^{\frac{1}{h}}\{1+P_6(\zeta_1,\zeta_2)\}, \end{aligned}$$

ただし

$$\zeta_1=h^{-1}(A+\log c_2)^{-1},$$
$$\zeta_2=c_2c_1^{-\frac{1}{h}}h^{\frac{1}{h}}(A+\log c_2)^{\frac{1}{h}}e^{-(A+\log c_2)}$$

という表現が得られる．これから $\lambda_{\mathrm{I}}(A)=2ne^{-A}Z_{\mathrm{I}}(A)$ の表現が直ちに従う．$\lambda_{\mathrm{II}}(A)$ の表現も (4.23) から同様にして従う．ゆえに

定理7′ $0<n<2$ のばあい，性質 (4.21) を持つ函数 $P_{\mathrm{I}}(u_1,u_2)$，$P_{\mathrm{II}}(u_1,u_2)$，があって，$A>0$ が充分大きいとき $\lambda_{\mathrm{I}}(A)$，$\lambda_{\mathrm{II}}(A)$ は次のように表現される．

(4.24)
$$\begin{cases} \lambda_{\mathrm{I}}(A)=2nC_1^{-\frac{1}{h}}h^{\frac{1}{h}}(A+\log C_2)^{\frac{1}{h}}e^{-A}\{1+P_{\mathrm{I}}(u_1,u_2)\} \\ \text{ただし}\quad u_1=h^{-1}(A+\log C_2)^{-1},\ u_2=C_1^{-\frac{1}{h}}h^{\frac{1}{h}}(A+\log C_2)^{\frac{1}{h}}e^{-A} \\ \lambda_{\mathrm{II}}(A)=2nC_1^{\frac{1}{1-h}}e^{\frac{A}{1-h}}\{1+P_{\mathrm{II}}(u_1,u_2)\} \\ \text{ただし}\quad u_3=C_1^{-\frac{1}{1-h}}e^{-\frac{h}{1-h}A},\ u_4=C_2C_1^{\frac{h}{1-h}}\exp\left[\frac{A}{1-h}-\frac{1}{h}C_1^{\frac{1}{1-h}}e^{\frac{h}{1-h}A}\right], \\ h=\frac{2-n}{2}. \end{cases}$$

3) 最後に $z\searrow -\rho=-\rho(n)$ のときの挙動を調べる．定理 3. iii) により

(2.18)
$$\frac{1}{\alpha(z)}\longrightarrow 0,\qquad \frac{\beta(z)}{\alpha(z)^2}\longrightarrow -\frac{1}{n}\qquad (z\to -\rho)$$

であるから，これを考慮して方程式 (2.18) を次のように変形する．

(4.25)
$$y_1 z\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (-\frac{n}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2)y_1 \\ -(n-1)(n-2)y_1^2-2(n-1)y_1y_2-y_2^2 \end{pmatrix},$$

ただし

$$y_1=\frac{1}{\alpha},\quad y_2=1+\frac{n\beta}{\alpha^2}-\frac{2(n-1)}{\alpha}.$$

(2.18)から対応する(4.25)の解$(y_1(z), y_2(z))$は$z \to -p$のとき$Q_2 : (y_1, y_2) = (0, 0)$に収束する。一方，(4.25)は$Q_2$の近傍で

$$(4.26) \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1 + P_1(u_1, u_2)) \\ u_2 + P_2(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

の形の変換により

$$(4.27) \qquad u_1 z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h u_1^2 \end{pmatrix} \quad h = -(n-1)(n-2)$$

に帰着する。ただし，$P_1(u_1, u_2)$ $[P_2(u_1, u_2)]$は，1次から[2次から]はじまる収束する2重巾級数である。この変換の構成は1)のばあいと同じ手順であり，特にP_1の1次の項は$-\frac{n}{2}u_1 - \frac{1}{3}u_2$となる。したがって対応する(4.27)の解$(u_1(z), u_2(z))$に対し，

$$(4.28) \qquad u_1 = \frac{1}{2} \log \frac{z}{-p}, \quad u_2 = u_1^2 (2h \log u_1 + c)$$

となる定数cが存在する。u_1, u_2を改めて

$$x_1 = -\frac{z+p}{p}, \quad x_2 = \left(\frac{z+p}{-p}\right)^2 \left(h \log \frac{z+p}{-p} + c'\right),$$

$$c' = -h \log 2 + \frac{c}{2}$$

で展開すれば

$$(4.29) \qquad \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2} x_1 \left\{ 1 + \frac{n+2}{4} x_1 - \frac{1}{6} x_2 + P_3(x_1, x_2) \right\} \\ y_2 = -\frac{1}{2} x_2 + P_4(x_1, x_2) \end{cases}$$

となる。ここに$P_3(x_1, x_2)$, $P_4(x_1, x_2)$は2次からはじまる収束2重巾級数である。(4.29)から直ちに$\alpha(z)$, $\beta(z)$の展開が得られる。こうして，次の定理を得る。

定理8. $0<n<\infty$ のばあい定数 c と2次からはじまる収束する2重巾級数 $P(u_1, u_2)$ があって，$b(z)$ は $z+\rho>0$ が充分小さいとき次のように表現される．

(4.30)
$$b(z)=\frac{n}{4\rho}\left(\frac{z+\rho}{\rho}\right)^{-2}\left\{1+\frac{n-2}{2}\left(\frac{z+\rho}{\rho}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{z+\rho}{\rho}\right)^2\left((n-1)(n-2)\log\frac{z+\rho}{\rho}+c\right)+ + P(u_1, u_2)\right\}$$

ただし，$u_1=\frac{z+\rho}{\rho}$，$u_2=\left(\frac{z+\rho}{\rho}\right)^2\left((n-1)(n-2)\log\frac{z+\rho}{\rho}+c\right)$.

この表現から§1, 4)の評価 (1.10) が成立し，$n\neq1, n\neq2$ のときは $b(z)$ は $z=-\rho$ を代数的分岐点でも極でもないことがわかる．表現 (4.30) と同時に $a(z)$ も

(4.31)
$$a(z)=\frac{2}{\rho}\left(\frac{z+\rho}{\rho}\right)^{-1}\left\{1-\frac{n-2}{4}\frac{z+\rho}{\rho}-\frac{1}{6}\left(\frac{z+\rho}{\rho}\right)^2\left((n-1)(n-2)\log\frac{z+\rho}{\rho}+c\right)+ + P'(u_1, u_2)\right\},$$

と表現される．ここに，u_1, u_2 は (4.30) と同じで，$P'(u_1, u_2)$ は2次からはじまる収束する2重巾級数である．

さらに，(4.30), (4.31) から逆函数の定理を応用した計算により $\lambda_{I}(A)$, $\lambda_{II}(A)$ の表現が得られる:

定理8'. $0<n<\infty$ のばあい，2次からはじまる収束する2重巾級数 $P_{I}(u_1, u_2)$, $P_{II}(u_1, u_2)$ があって，$-A$ が充分大きいとき，$\lambda_{I}(A)$, $\lambda_{II}(A)$ は次のように表現される:

$$
(4.30)\quad \begin{cases} \lambda_{\mathrm{I}}(A) = -2n\rho e^{-A}\Big\{ 1 - \left(\frac{ne^A}{4\rho}\right)^{1/2} + \\ \qquad + P_{\mathrm{I}}\Big[\left(\frac{ne^A}{4\rho}\right)^{1/2},\ \frac{ne^A}{4\rho}\left(\frac{\hbar}{2}A + \frac{\hbar}{2}\log\frac{n}{4\rho} + c\right)\Big]\Big\} \\ \lambda_{\mathrm{II}}(A) = -2n\rho\, e^{-A}\Big\{ 1 - \frac{2e^A}{\rho} + \\ \qquad + P_{\mathrm{II}}\Big[\frac{2e^A}{\rho},\ \left(\frac{2e^A}{\rho}\right)^2\left(\hbar A + \hbar \log\frac{2}{\rho} + c\right)\Big]\Big\} \end{cases}
$$

ただし

$$
\hbar = (n-1)(n-2).
$$

参考文献

[1] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Univ. of Chicago Press, 1939.

[2] I. M. Gel'fand, Some problems in the theory of quasi-linear equations, Uspehi Mat. Nauk., 14(86), (1959), 87 - 158.

[3] E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, John Wiley, New York, 1976.

[4] M. Iwano, On a singular point of Briot-Bouquet type of a system of ordinary non-linear differential equations, Commentariorum Mathematicorum Universitatis Sancti Pauli, 11 (1963), pp. 37 - 78.

[5] D.D. Joseph & T. S. Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, Arch. Rational Mech. Anal., 49 ((1972-73), pp. 241 - 269.

[6] Y. Kametaka, On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type, Osaka J. Math., 13 (1976), pp. 11 - 16.

[7] 木村俊房, 常微分方程式 II (講座基礎数学), 岩波, 1977

[8] S. Lefschetz, Differential Equations: Geometric Theory, John Wiley, New York, 1957.

[9] R. A. Smith, Singularities of solutions of certain plane autonomous systems, Proc. R. S. Edinburgh, (A) 72 (1973-74), pp. 307 - 315.